第 2 講　式と証明

PART1　恒等式

例題

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$x^2=a(x+2)^2+b(x+3)^2+c(x+2)(x+3)$

(2)　$\dfrac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

Point Pickup

練習

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$2x^2+3x-1=ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)$

(2)　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

第 2 講　PART1 確認問題

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

1 $3x^2+10x-1=a(x+1)^2+b(x-1)^2+c(x+1)(x-1)$

$a=$ ア ，$b=$ イウ ，$c=$ エ

2 $\dfrac{3}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

$a=$ オ ，$b=$ カキ ，$c=$ ク

第 2 講　式と証明

PART1　恒等式

例題

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$x^2=a(x+2)^2+b(x+3)^2+c(x+2)(x+3)$

(2)　$\dfrac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

(1)　等式の右辺を x について整理すると

$$x^2=(a+b+c)x^2+(4a+6b+5c)x+4a+9b+6c$$

これが x についての恒等式となるとき

$$1=a+b+c,\ 0=4a+6b+5c,\ 0=4a+9b+6c$$

これを解いて　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

(別解)

等式の両辺に $x=-3$，-2，-1 をそれぞれ代入すると

$$9=a,\ 4=b,\ 1=a+4b+2c$$

よって $a=9$，$b=4$，$c=-12$

逆に，$a=9$，$b=4$，$c=-12$ とすると，与えられた等式の右辺は

$$9(x+2)^2+4(x+3)^2-12(x+2)(x+3)=x^2$$

となり，左辺と一致するから，与えられた等式は x についての恒等式となる。

以上より　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

(2)　等式の右辺を x について整理すると

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}\quad \text{すなわち}\quad \frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$$

これが x についての恒等式となるとき　$2=a+b$，$-1=2a+b$

これを解いて　$a=-3$，$b=5$

(別解)

与えられた等式が x についての恒等式ならば，その両辺に $(x+1)(x+2)$ を掛けて得られる等式 $2x-1=a(x+2)+b(x+1)$ も x についての恒等式である。

右辺を整理して $2x-1=(a+b)x+2a+b$

これが x についての恒等式となるとき　$2=a+b$，$-1=2a+b$

これを解いて　$a=-3$，$b=5$

練習

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$2x^2+3x-1=ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)$

(2)　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

(1)　等式の右辺を x について整理すると

$$2x^2+3x-1=(a+b+c)x^2+(a-b)x-c$$

これが x についての恒等式となるとき

$$2=a+b+c,\ 3=a-b,\ -1=-c$$

これを解いて　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

(別解)

等式の両辺に $x=0$，1，-1 をそれぞれ代入すると

$$-1=-c,\ 4=2a,\ -2=2b$$

よって　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

逆に，$a=2$，$b=-1$，$c=1$ とすると，与えられた等式の右辺は

$$2x(x+1)-x(x-1)+(x+1)(x-1)=2x^2+3x-1$$

となり，左辺と一致するから，与えられた等式は x についての恒等式となる。

以上より　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

(2)　等式の右辺を x について整理すると

$$\frac{3}{x^3-1}=\frac{a\left(x^2+x+1\right)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$$

すなわち　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c}{x^3-1}$

これが x についての恒等式となるとき　$0=a+b$，$0=a-b+c$，$3=a-c$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$，$c=-2$

（別解）

与えられた等式が x についての恒等式ならば，その両辺に $(x-1)\left(x^2+x+1\right)$，すなわち x^3-1 を掛けて得られる等式 $3=a\left(x^2+x+1\right)+(bx+c)(x-1)$ も x についての恒等式である。

右辺を整理して $3=(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c$

これが x についての恒等式となるとき　$0=a+b$，$0=a-b+c$，$3=a-c$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$，$c=-2$

第 2 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イウ：-2，エ：2

[解説]

等式の右辺を x について整理すると

$$3x^2+10x-1$$
$$=(a+b+c)x^2+2(a-b)x+a+b-c$$

これが x についての恒等式となるとき

$3=a+b+c$，$10=2(a-b)$，$-1=a+b-c$ [A]

これを解いて　$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-2}$，$\boldsymbol{c=2}$

（別解）

等式の両辺に $x=0$，1，-1 をそれぞれ代入すると

$-1=a+b-c$，$12=4a$，$-8=4b$ [B]

よって　$a=3$，$b=-2$，$c=2$

逆に，$a=3$，$b=-2$，$c=2$ とすると，与えられた等式の右辺は

$$3(x+1)^2-2(x-1)^2+2(x+1)(x-1)$$
$$=3x^2+10x-1$$

となり，左辺と一致するから，与えられた等式は x についての恒等式となる。[B]

以上より　$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-2}$，$\boldsymbol{c=2}$

[A]　恒等式の性質
$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式
$\Longleftrightarrow$　$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

[B]　ある等式が x についての恒等式ならば，どのような x の値を代入しても成り立つことを利用し，未定係数を求める。
求めた係数によって，与えられた等式が恒等式になることを確認する。

2 [正解] オ：1，カキ：-1，ク：2

[解説]

等式の右辺を x について整理すると

$$(\text{右辺})=\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}$$

すなわち

$$\frac{3}{x^3+1}=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}$$

これが x についての恒等式となるとき

$$0=a+b,\ 0=-a+b+c,\ 3=a+c$$ [C]

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=2}$

（別解）

与えられた等式が x についての恒等式ならば，その両辺に $(x+1)(x^2-x+1)$，すなわち x^3+1 を掛けて得られる等式

$$3=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$$

も x についての恒等式である。

右辺を整理して

$$3=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c$$

これが x についての恒等式となるとき

$$0=a+b,\ 0=-a+b+c,\ 3=a+c$$ [C]

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=2}$

[C]　恒等式の性質
$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が
x についての恒等式
$\iff$　$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$